

វិញ្ញាសាការប្រកួតប្រជែងគណិតវិទ្យា MOSC ថ្នាក់ទី១០

សម័យប្រឡង ៖ ២០២៣

រយៈពេល៖ ៩០នាទី

1. តើ $A = 113^n - 168^n - 141^n + 427^n$ ចែកដាច់នឹងប៉ុន្មានគ្រប់ចំនួនធម្មជាតិ n

A. 5

B. 6

C. 7

D. 8

E. ចម្លើយផ្សេង

2. រកសំណល់នៃការចែក $A = 147^{157} + 157^{147}$ នឹង 13 ។

A. 5

B. 8

C. 10

D. 11

E. ចម្លើយផ្សេង

3. គេឲ្យអនុគមន៍ $y = \frac{3 \cos x}{5 + 4 \sin x}$ ។ ចូររកតម្លៃតូចបំផុតនិងធំបំផុតនៃ y ។

A. $y_{\min} = 1, y_{\max} = 0$

B. $y_{\min} = -1, y_{\max} = 1$

C. $y_{\min} = 0, y_{\max} = 1$

D. $y_{\min} = -1, y_{\max} = \frac{1}{2}$

E. ចម្លើយផ្សេង

4. រកតម្លៃតូចបំផុតនៃ $T = \sqrt{a^2 + (1-b)^2} + \sqrt{b^2 + (1-c)^2} + \sqrt{c^2 + (1-a)^2}$ គ្រប់ចំនួនពិត a, b, c

A. $T_{\min} = 0$

B. $T_{min} = \sqrt{2}$

C. $T_{min} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

D. $T_{min} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

E. ចម្លើយផ្សេង

5. រកអនុគមន៍ $f(x)$ បើ $f\left(\frac{2x-1}{x+2}\right) = \frac{x-1}{x+1}$; $x \neq -1, x \neq -2$

A. $f(x) = \frac{x+1}{3x-1}$

B. $f(x) = \frac{x-1}{3x-1}$

C. $f(x) = \frac{x+3}{3x-1}$

D. $f(x) = \frac{3x-1}{x+1}$

E. ចម្លើយផ្សេង

6. រកអនុគមន៍ $f(x)$ បើ $f(x+2) = x^2 - 1$ ។

A. $f(x) = x^2 - 4x$

B. $f(x) = x^2 - 4x + 3$

C. $f(x) = (x-2)^2$

D. $f(x) = x^2 - 4x + 6$

E. ចម្លើយផ្សេង

7. គណនាតម្លៃ S ដែល $S = \frac{1+2}{2} + \frac{1+2+3}{2^2} + \frac{1+2+3+4}{2^3} + \frac{1+2+3+4+5}{2^4} + \dots$

A. 7

B. 25

C. 102

D. 126

E. ចម្លើយផ្សេង

8. គណនាផលបូក $S = \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2021}+\sqrt{2022}}$

A. $S = \sqrt{2022} + 2\sqrt{2021}$

B. $S = \sqrt{2022} - \sqrt{2021}$

C. $S = \sqrt{2022} - \sqrt{2} - 1$

D. $S = \sqrt{2022} - 1$

E. ចម្លើយផ្សេង

9. ដោះស្រាយសមីការក្នុង IR : $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

A. $x = \frac{1}{2}$

B. $x = 2$

C. $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $x = \frac{3}{2}$

E. ចម្លើយផ្សេង

10. រកបណ្តាចំនួន x, y, z ដោយដឹងថា $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$ និង $x^{2022} + y^{2022} + z^{2022} = 3^{2023}$

A. $x=1, y=1, z=2$

B. $x=2, y=2, z=1$

C. $x=2, y=3, z=3$

D. $x=y=z=3$

E. ចម្លើយផ្សេង

11. រកតម្លៃ TATE ខាងក្រោមដោយដឹងថាអក្សរនីមួយៗតាងលេខខុសៗគ្នាពី០ដល់៩

F A T

F A N

T A T E

A. $T=7, A=5, F=1, N=9, E=0$

B. $T=3, A=5, F=9, N=0, E=1$

C. $T=5, A=7, F=0, N=3, E=0$

D. $T=1, A=5, F=7, N=9, E=0$

E. ចម្លើយផ្សេង

12. គណនាផលបូក $S_n = C_n^1 + 4C_n^2 + 9C_n^3 + \dots + n^2 C_n^n$ ដែល $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

A. $S_n = (n+1)2^{n-1}$

B. $S_n = n(n+1)2^{n-1}$

C. $S_n = n(n+1)2^{n-2}$

D. $S_n = n^2(n+1)2^{n-1}$

E. ចម្លើយផ្សេង

13. គណនា $A = \frac{1}{P(2,2)} + \frac{1}{P(3,2)} + \dots + \frac{1}{P(n,2)}$

A. $A = \frac{n-1}{n}$

B. $A = \frac{n}{n-1}$

C. $A = \frac{n+1}{n}$

D. $A = \frac{n+1}{n^2}$

E. ចម្លើយផ្សេង

14. ផលបូកនៃពីរចំនួនស្មើនឹង 1។ គណនាតម្លៃធំបំផុតរបស់ផលគុណនៃពីរចំនួននោះ។

A. 0

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{2}$

D. 1

E. ចម្លើយផ្សេង

15. គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a, b, c ។ ចូររកប្រភេទនៃត្រីកោណនេះដោយដឹងថា $\sin \frac{A}{2} = \frac{a}{2\sqrt{bc}}$ ។

A. ត្រីកោណកែង

- B. ត្រីកោណសមបាត
- C. ត្រីកោណសម័ង្ស
- D. ត្រីកោណកែងកន្លះសម័ង្ស
- E. ចម្លើយផ្សេង

សម័យប្រឡង ៖ ២០២២

រយៈពេល៖ ៩០នាទី

1. រកចំនួនដែលចែកជាចំនួន A

$$\text{តាមរូបមន្ត } a^2 - b^2 = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$$

$$\text{ដោយ } A = 113^n - 168^n - 141^n + 427^n$$

$$= (427^n - 168^n) - (141^n - 113^n)$$

$$= (427 - 168)(427^{n-1} + 427^{n-2} \cdot 168 + \dots + 168^{n-1}) - (141 - 113)(141^{n-1} + 141^{n-2} \cdot 113 + \dots + 113^{n-1})$$

$$259m_1 - 28m_2$$

$$\text{ដែល } m_1 = 427^{n-1} + 427^{n-2} \cdot 168 + \dots + 168^{n-1} ; m_1 \in \mathbb{N}^+$$

$$m_2 = 141^{n-1} + 141^{n-2} \cdot 113 + \dots + 113^{n-1} ; m_2 \in \mathbb{N}^+$$

$$\text{នាំឲ្យ } A = 7(37m_1 - 4m_2)$$

ដូចនេះ A ចែកជាចំនួន 7 គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n

ចម្លើយ៖ C.7

2. រកសំណល់នៃការចែករវាង $A = 147^{157} + 157^{147}$ នឹង 13

$$\text{ដោយ } 147 = 13 \cdot 11 + 4$$

$$= 13 \cdot 12 + 4$$

$$\text{នោះ } 147^{157} = (13 \cdot 11 + 4)^{13 \cdot 12 + 4} = 13N + 4(4^{13})^{12} \quad (1)$$

$$\text{ដោយ } \gcd(4, 13) = 1 \Rightarrow \gcd(4^{13}, 13) = 1$$

នោះតាមទ្រឹស្តីបទ Fermat

$$\Rightarrow (4^{13})^{12} = 1 \pmod{13}$$

$$\text{តាម (1) : } 147^{157} = 4 \pmod{13} \quad (2)$$

$$\text{ហើយ } 157^{147} = (13 \times 12 \times 1)^{147} = 13N_1 + 1$$

$$\text{នាំឲ្យ } 157^{147} = 1 \pmod{13} \quad (3)$$

តាម (2) និង (3)

$$\begin{aligned} A &= 147^{157} + 157^{147} = 4+1 \pmod{13} \\ &= 5 \pmod{13} \end{aligned}$$

ដូចនេះ A ចែកដាច់នឹង B មានសំណល់ 5

ចម្លើយ: A.5

3. រកតម្លៃធំបំផុតនិងតូចបំផុតនៃអនុគមន៍ y

$$\text{ដោយ } y = \frac{3 \cos x}{5 + 4 \sin x}$$

$$\text{នោះ } 5y + 4y \sin x = 3 \cos x$$

$$3 \cos x - 4y \sin x = 5y \quad (1)$$

តាមវិសមភាព Cauchy – Schwarz

$$\text{បាន: } (3 \cos x - 4y \sin x) \leq \sqrt{9 + 16y^2} \quad (2)$$

តាម (1) និង (2)

$$\text{នាំឲ្យ } (5y) \leq \sqrt{9 + 16y^2}$$

$$25y^2 \leq 9 + 16y^2$$

$$25y^2 - 16y^2 \leq 9$$

$$9y^2 \leq 9$$

$$y^2 \leq 1$$

$$\text{បាន } -1 \leq y \leq 1$$

$$\text{ដូចនេះ } y_{\min} = -1, y_{\max} = 1 \text{ ។}$$

ចម្លើយ: B. $y_{\min} = -1, y_{\max} = 1$

4. រក $T_{\min}$

តាមវិសមភាព Minkowsky គេបាន

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} + \sqrt{x_3^2 + y_3^2} \geq \sqrt{(x_1 + x_2 + x_3)^2 + (y_1 + y_2 + y_3)^2}$$

$$\text{តាង } x_1 = a, x_2 = b, x_3 = c$$

$$y_1 = 1-b, y_2 = 1-c, y_3 = 1-a$$

$$s = a+b+c$$

$$\text{បាន } (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (y_1 + y_2 + y_3)^2 = s^2 + (3-5)^2 \geq \frac{9}{2}$$

$$\text{ព្រោះ } s^2 + (3-5)^2 = 25^2 - 65 + 9 = \frac{1}{2} [(25-3)^2 + 9] \geq \frac{3}{2}$$

$$\text{នោះ } \sqrt{(x_1 + x_2 + x_3)^2 + (y_1 + y_2 + y_3)^2} \geq \sqrt{\frac{9}{2}}$$

$$\text{នាំឲ្យ } T \geq \sqrt{\frac{9}{2}}$$

$$T \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{ដូចនេះ } T_{\min} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

ចម្លើយ៖ D. $T_{\min} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

5. រកអនុគមន៍ $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$

$$\text{យើងមាន: } f\left(\frac{2x-1}{x+2}\right) = \frac{x+1}{x-1}; x \neq 1; x \neq -2$$

$$\text{តាង } t = \frac{2x-1}{x+2}$$

$$\text{នោះ } xt + 2t = 2x - 1$$

$$xt - 2x = -1 - 2t$$

$$x(t-2) = -1 - 2t$$

$$x = \frac{-1-2t}{t-2}$$

$$x = \frac{2t+1}{2-t}$$

$$\text{បាន: } f(t) = \frac{\frac{1+2t}{2-t} + 1}{\frac{1+2t}{2-t} - 1}$$

$$= \frac{\frac{1+2t+2-1}{2-t}}{\frac{1+2t-2+1}{2-t}}$$

$$= \frac{t+3}{3t-1}$$

ជំនួស $x = t$ នាំឲ្យ $f(x) = \frac{x+3}{3x-1}$

ដូចនេះ $f(x) = \frac{x+3}{3x-1}$

ចម្លើយ៖ C. $f(x) = \frac{x+3}{3x-1}$

6. រក $f(x)$

យើងមាន $f(x+2) = x^2-1$

តាង $t = x+2$ នាំឲ្យ $x = t-2$

នោះ $f(t) = (t-2)^2-1$

$$f(t) = t^2-4t+3$$

ជំនួស t ដោយ x

បាន $f(x) = x^2-4x+3$

ដូចនេះ $f(x) = x^2-4x+3$

ចម្លើយ៖ B. $f(x) = x^2-4x+3$

7. រកតម្លៃ S

យើងមាន៖

$$S = \frac{1+2}{2} + \frac{1+2+3}{2^2} + \frac{1+2+3+4}{2^3} + \frac{1+2+3+4+5}{2^4} + \dots \quad (1)$$

$$\text{នោះ } \frac{S}{2} = \frac{1+2}{2^2} + \frac{1+2+3}{2^3} + \frac{1+2+3+4}{2^4} + \frac{1+2+3+4+5}{2^5} + \dots \quad (2)$$

យក (1) - (2) នោះ៖

$$A - \frac{A}{2} = \frac{1+2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots$$

$$\frac{A}{2} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots$$

$$\frac{A}{4} = \frac{3}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \dots$$

$$\text{យក } \frac{A}{2} = \frac{A}{4} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots$$

$$\frac{A}{4} = \frac{3}{2} + \frac{\frac{1}{2^3}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow A = 7$$

ដូចនេះ $A = 7$

ចម្លើយ៖ A. $A=7$

8. គណនាផលបូក

$$S = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2021}\sqrt{2022}}$$

ដោយ $(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) = (\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = \dots$

$$= (\sqrt{2022} + \sqrt{2021})(\sqrt{2022} - \sqrt{2021}) = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} - 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \sqrt{3} - \sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2022} + \sqrt{2021}} = \sqrt{2022} - \sqrt{2021} \end{array} \right.$$

ដោយបូកអង្គទាំងពីរ បាន

$$S = \sqrt{2022} - 1$$

$$\text{ដូចនេះ: } S = \sqrt{2022} - 1$$

ចម្លើយ៖ D. $S = \sqrt{2022} - 1$

10. រកបណ្តាចំនួន x, y, z

យើងមាន: $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$ (គុណអង្គទាំងពីរនឹង 2)

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 2xy + 2yz + 2zx$$

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx = 0$$

$$(x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 - 2yz + z^2) + (z^2 - 2zx + x^2) = 0$$

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0$$

$$\text{នោះ: } \begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \\ z - x = 0 \end{cases}$$

$$\text{បាន: } x - y = z$$

$$\text{នាំឲ្យ } x^{2022} = y^{2022} + z^{2022}$$

$$\text{ជំនួសក្នុង } x^{2022} + y^{2022} + z^{2022} = 3^{2023}$$

$$3x^{2022} = 3^{2023}$$

$$x^{2022} = \frac{3^{2023}}{3} = 3^{2022}$$

$$x = 3$$

ដូចនេះ: $x = y = z = 3$

ចម្លើយ: D. $x = y = z = 3$

11. រកតម្លៃ TATE ខាងក្រោមដោយដឹងថាអក្សរនីមួយៗតាងលេខខុសៗគ្នាពី០ដល់៩

F A T

F A N

T A T E

ខ្ទង់ពាន់ $F+F=TA \Rightarrow T=1$

ខ្ទង់ដប់ $A+A=T \Rightarrow T=1$

ខ្ទង់ពាន់ $F+F=15 \Rightarrow F=7$

ខ្ទង់រយ $1+N=E \Rightarrow N=9, E=0$

ដូចនេះ: $T=1, A=5, F=7, N=9, E=0$

ចម្លើយ: D. $T=1, A=5, F=7, N=9, E=0$

12. គណនាផលបូក S_n

យើងមាន: $S_n = C_n^1 + 4C_n^2 + 9C_n^3 + \dots + n^2 C_n^n$

តាមទ្វេធាញ្ចតុន $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n$

ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរនៃសមីការ

បាន: $n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + 3C_n^3 x^2 + \dots + nC_n^n x^{n-1}$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង x

បាន: $nx(1+x)^{n-1} = C_n^1 x + 2C_n^2 x^2 + 3C_n^3 x^3 + \dots + nC_n^n x^n$

ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរនៃសមីការ

បាន: $n(1+x)^{n-1} + n(n-1)x(1+x)^{n-2}$

យក $x = 1$ ជំនួសក្នុងសមភាពនេះ

$n \cdot 2^{n-1} + n(n-1) \cdot 2^{n-2} = C_n^1 + 4C_n^2 + 9C_n^3 + \dots + n^2 C_n^n$

នាំឱ្យ $S_n = n \cdot 2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2}$

$S_n = [2n + n(n-1)] \cdot 2^{n-2}$

$S_n = n(n+1)2^{n-2}$

ដូចនេះ $S_n = n(n+1) \cdot 2^{n-2}$

ចម្លើយ៖ B. $S_n = n(n+1) \cdot 2^{n-2}$

13. គណនា A

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{P(2,2)} + \frac{1}{P(3,2)} + \dots + \frac{1}{P(n,2)} \\ &= \frac{\frac{1}{2!}}{(2-2)!} + \frac{\frac{1}{3!}}{(3-2)!} + \dots + \frac{\frac{1}{n!}}{(n-2)!} \\ &= \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{2!}{4!} + \dots + \frac{(n-2)!}{n!} \\ &= \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{2!}{3 \times 4!} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n-1)} \\ &= \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{(n-1) \times n} \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

$$A = 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$$

ដូចនេះ $A = \frac{n-1}{n}$

ចម្លើយ៖ A. $A = \frac{n-1}{n}$

14. គណនាតម្លៃធំបំផុតរបស់ផលគុណនៃពីរចំនួននោះ

តាង a និង b ជាពីរចំនួននោះ

បម្រាប់: $a+b=1$ (លើកអង្គទាំងពីរជាការ៉េ)

$$(a+b)^2 = 1$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 1 \quad (1)$$

ដោយ $(a-b)^2 \geq 0$

$$a^2 + 2ab + b^2 \geq 0$$

$$2ab \leq a^2 + b^2 \quad (2)$$

យក (1) + (2) បាន

$$4ab \leq 1$$

$$ab \leq \frac{1}{4}$$

ដូចនេះ តម្លៃធំបំផុតរបស់ផលគុណនៃពីរចំនួននោះគឺ $\frac{1}{4}$

ចម្លើយ៖ B. $\frac{1}{4}$

15. រកប្រភេទត្រីកោណ ABC

ដោយ $\sin \frac{A}{2} = \frac{a}{2\sqrt{bc}}$

នោះ $\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{a^2}{4bc}$

តែ $\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{1-\cos A}{2}$

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

នាំឲ្យ $\frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2} = \frac{a^2}{4bc}$

$$-(b-c)^2 = 0$$

$$\Rightarrow b = c$$

ដូចនេះ ABC ជាត្រីកោណសមបាតកំពូល A

ចម្លើយ៖ B. ត្រីកោណសមបាត