វិញ្ញាសាការប្រកួតប្រជែងគណិតវិទ្យាMOSCថ្នាក់ទី១១
សម័យប្រឡង ៖ ២០២២
រយៈពេល៖ ៩០នាទី

1. ឧបមាថា x, y, z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ដែល $xyz^2 = 2$, $xy^2z = 8$ និង $x^2yz = 16$។

ចូរគណនាផលគុណ xyz។

A. xyz = 2

B. xyz = 4

C. xyz = 8

D. xyz = 16

E. ចម្លើយផ្សេង

2. គណនា $M = \log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdots \log_{2020} 2021 \cdot \log_{2022} 2022 \cdots \log_{2022} 2$

A. M = 1

B. M = 2021

C. $M = \frac{1}{2021}$

D. M = 2022

E. ចម្លើយផ្សេង

3. គណនា $cos\frac{7\pi}{12}$

A. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

B. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

C. $\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

D. $\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

E. ចម្លើយផ្សេងៗ

4. គណនាតម្លៃ $M = 2020\left(\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{2021\times2022}\right)$

A. 2021

B. 2022

C. $1-\frac{1}{2022}$

D. $\frac{1}{2022}$

E. ចម្លើយផ្សេង

5. គណនាកន្សោម M= $\left(\sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{48-10\sqrt{7+4\sqrt{3}}}}}-1\right)^{2022}$

A. M = 1

B. M = 2^{2022}

C. M = 3^{2022}

D. M = 4^{2022}

E. ចម្លើយផ្សេង

6. គេឲ្យចំនួនពិត x និង y ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $x^2 + 3xy + y^2 = 2020$។ រកតម្លៃធំបំផុតនៃផលគុណ xy។

A. 44

B. 100

C. 404

D. 2020

E. ចម្លើយផ្សេង

7. គណនា P = $\log_n \sqrt{n\sqrt[3]{n^2 \cdot \sqrt[4]{n^3 \cdot \sqrt[5]{n^4 \cdot \ \cdots \sqrt[2021]{n^{2020} \cdot \sqrt[2022]{n^{2021}}}}}}}$

A. P= 1

B. P= 100

C. P = $\frac{1}{2022!}$

D. P= 2020

E. ចម្លើយផ្សេង

8. គណនាផលគុណ: P = $sin5^{\circ} \times sin15^{\circ} \times sin\ 25^{\circ} \times sin35^{\circ} \times sin45^{\circ} \times sin55^{\circ} \times sin65^{\circ} \times sin75^{\circ} \times sin85^{\circ}$

A.P =$\frac{\sqrt{2}}{2^8}$

B.P = $\frac{\sqrt{2}}{2^9}$

C. P = $\frac{\sqrt{6}}{2^8}$

D.P = $\frac{\sqrt{6}}{2^9}$

E. ចម្លើយផ្សេង

9. គេឲ្យ $a_i > 0, \forall i = \overline{1, 2022}$ ដែល $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \cdots = a_{2022} = 4$ ។ រកតម្លៃតូចបំផុតនៃកន្សោម

$(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\cdots(1+a_{2022})$

A.2^{2022}

B. 2^{2022}

C. 2^{2023}

D. 2^{2024}

E. ចម្លើយផ្សេង

10. គណនាតម្លៃ a+b បើគេដឹងថាចំនួន $\overline{135a4b}$ ចែកដាច់នឹង45។

A. 10

B. 12

C. 14

D. 16

E. ចម្លើយផ្សេង

11. គេឲ្យ $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ ដែល $a, b, c, d \in \mathbb{R}$។ ឧបមាថា f(1) = 1, f(2) = 2 និង f(3) = 3។ គណនា $P = \frac{f(2022)+f(-2018)-4}{2019 \times 2010 \times 2021}$

A.2020

B. 2022

C. 4040

D. 4040

E. ចម្លើយផ្សេង

12. រកលេខខាងចុងនៃ $S = 1! + 2! + 3! + 4! + \cdots + 2022!$

A.0

B.1

C. 2

D. 3

E. ចម្លើយផ្សេង

13. សំណុំចម្លើយនៃសមីការ $\tan(4k+2)x - \tan(4k+1)x - \tan(4k+2)x \cdot \tan(4k+1)x = 1, k \in \mathbb{Z}$

A. ∅

B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\left\{n\pi+\frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z}\right\}$

D.$\left\{2n\pi+\ \frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z}\right\}$

E. ចម្លើយផ្សេង

14. គេឲ្យ (u_n) ជាស្វ៊ីតចំនួនពិតដែលកំណត់ដោយ $u_1 = 1$ និង $u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+u_n} +\ u_n$
គណនាតួទី 2022 នៃស្វ៊ីត។

$A.\frac{1}{2022}$

$B.$ −2022

C. 2022

D. $\sqrt{2022}$

E. ចម្លើយផ្សេង

15. គេឲ្យ ABCDEFGHIJKL ជាពហុកោណនិយ័តដែលមាន 12ជ្រុងនិង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃពហុកោណនោះ។ គណនា $\frac{AB}{AF} + \frac{AF}{AB}$

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

E. ចម្លើយផ្សេង

ដំណោះស្រាយវិញ្ញាសាការប្រកួតប្រជែងគណិតវិទ្យាMOSCថ្នាក់ទី១១
សម័យប្រឡង ៖ ២០២២
រយៈពេល៖ ៩០នាទី

1. គណនាផលគុណ xyz

   គេមាន $xyz^2 = 2$, $xy^2z = 8$ និង $x^2yz = 16$ នោះ $(xyz)^4 = 2 \times 8 \times 16 = 256$

   គេបាន xyz=$\sqrt[4]{256} = 4$

   ដូចនេះ ចម្លើយគឺ B. xyz=4

2. គណនា M

   គេមាន M= $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdots \log_{2020} 2021 \cdot \log_{2022} 2022 \cdots \log_{2022} 2$

   $$= \frac{ln3}{ln2} \cdot \frac{ln4}{ln3} \cdot \frac{ln5}{ln4} \cdot \frac{ln6}{ln5} \cdot \ldots \cdot \frac{ln2021}{ln2020} \cdot \frac{ln2022}{ln2021} \cdot \frac{ln2}{ln2022} = 1$$

   ដូចនេះ ចម្លើយគឺ A. M=1

3 គណនា $\cos\frac{7\pi}{12}$

   គេមាន $\cos\frac{7\pi}{12} = \cos(\frac{3\pi}{12} + \frac{4\pi}{12}) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = cos\frac{\pi}{4} cos\frac{\pi}{3} - sin\frac{\pi}{4} sin\frac{\pi}{3}$

   $$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} = \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

   ដូចនេះ ចម្លើយគឺ D. $\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

4 គណនាតម្លៃ M

   គេមាន $M = 2022\left(\frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \frac{1}{3\times4} + \cdots + \frac{1}{2021\times2022}\right)$

   $$= 2022\left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2021} - \frac{1}{2022}\right)\right]$$

   $$= 2022\left(1 - \frac{1}{2022}\right) = 2022 - 1 = 2021$$

   ដូចនេះ ចម្លើយគឺ A.2021

5. គណនា M

   គេមាន $\sqrt{7+4\sqrt{3}} = \sqrt{7+2\sqrt{4\times3}} = \sqrt{\left(\sqrt{4}+\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} + \sqrt{3} = 2 + \sqrt{3}$

   នាំឲ្យ $48 - 10\sqrt{7+4\sqrt{3}} = 48 - 10\left(2+\sqrt{3}\right) = 28 - 10\sqrt{3} = 28 - 2\sqrt{25\times3}$

   $$\sqrt{48 - 10\sqrt{7+4\sqrt{3}}} = \sqrt{28 - 2\sqrt{25\times3}} = \sqrt{\left(\sqrt{25}-\sqrt{3}\right)^2} = 5 - \sqrt{3}$$

$$\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{48-10\sqrt{7+4\sqrt{3}}}}=5\sqrt{3}+5(5-\sqrt{3})=25$$

$$\sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{48-10\sqrt{7+4\sqrt{3}}}}}=\sqrt{4+\sqrt{25}}=\sqrt{4+5}=3$$

M= $(3-1)^{2022}=2^{2022}$

ដូចនេះ ចម្លើយគឺ B. M= 2^{2022}

6. រកតម្លៃធំបំផុតនៃផលគុណ xy

គេមាន $x^2+3xy+y^2=2020$ សមមូល $x^2-2xy+y^2+5xy=2020$

$$(x-y)^2+5xy=2020$$

$$5xy=2020-(x-y)^2$$

$$xy=404-\frac{1}{5}(x-y)^2$$

$$xy\leq 404$$

គេបាន xy មានតម្លៃអតិបរមាស្មើ 404 ហើយសមភាពកើតឡើងកាលណា x=y

ដូចនេះ ចម្លើយគឺ C.404

7. គណនា P

គេមាន P = $\log_n\sqrt{n\sqrt[3]{n^2\cdot\sqrt[4]{n^3\cdot\sqrt[5]{n^4\cdot\ \ldots\ \sqrt[2021]{n^{2020}\cdot\sqrt[2022]{n^{2021}}}}}}}$

$$=\log_n\left(n\sqrt[3]{n^2\cdot\sqrt[4]{n^3\cdot\sqrt[5]{n^4\cdot\ \ldots\ \sqrt[2021]{n^{2020}\cdot\sqrt[2022]{n^{2021}}}}}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\log_n n+\frac{1}{2}\log_n\left(\sqrt[3]{n^2\cdot\sqrt[4]{n^3\cdot\sqrt[5]{n^4\cdot\ \ldots\ \sqrt[2021]{n^{2020}\cdot\sqrt[2022]{n^{2021}}}}}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log_n\left(n^2\cdot\sqrt[4]{n^3\cdot\sqrt[5]{n^4\cdot\ \ldots\ \sqrt[2021]{n^{2020}\cdot\sqrt[2022]{n^{2021}}}}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{1}{2!}+\frac{1}{2\times 3}\log_n n^2+\frac{1}{2\times 3}\log_n\left(\sqrt[4]{n^3\cdot\sqrt[5]{n^4\cdot\ \ldots\ \sqrt[2021]{n^{2020}\cdot\sqrt[2022]{n^{2021}}}}}\right)$$

$$=\frac{1}{2!}+\frac{1}{2\times 3}\log_n n^2+\frac{1}{2\times 3}\log_n\left(n^3\cdot\sqrt[5]{n^4\cdot\ \ldots\ \sqrt[2021]{n^{2020}\cdot\sqrt[2022]{n^{2021}}}}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$= \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{1}{4!}\log_n n^3 + \frac{1}{2\times3\times4}\log_n \sqrt[5]{n^4 \cdot \dots \sqrt[2021]{n^{2020} \cdot \sqrt[2022]{n^{2021}}}}$

$= \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \frac{4}{5!} + \dots + \frac{2020}{2021!} + \frac{2021}{2022!}$

$= \sum_{k=1}^{2021} \frac{k}{(k-1)!}$

ដោយ $\frac{k}{(k-1)!} = \frac{(k+1)-1}{(k-1)!} = \frac{k+1}{k!(k+1)} - \frac{1}{(k-1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k-1)!}$

នាំឲ្យ $\sum_{k=1}^{2021} \frac{k}{(k-1)!} = \sum_{k=1}^{2021}\left[\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k-1)!}\right] = 1 - \frac{1}{2022!}$

ដូចនេះ ចម្លើយគឺ D.P=$1 - \frac{1}{2022!}$

8. គណនា P

គេមាន$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$ គេបាន៖

P= $sin5^{\circ} \times sin15^{\circ} \times sin\ 25^{\circ} \times sin35^{\circ} \times sin45^{\circ} \times sin55^{\circ} \times sin65^{\circ} \times sin75^{\circ} \times sin85^{\circ}$

$= sin5^{\circ} \times sin15^{\circ} \times sin\ 25^{\circ} \times sin35^{\circ} \times sin45^{\circ} \times \cos 35° \times \cos 25° \times \cos 15° \times \cos 5°$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sin 5° \times \cos 5° \times \sin 15° \times \cos 15° \times \sin 25° \times \cos 25° \times \sin 35° \times \cos 35°$

$= \frac{\sqrt{2}}{2^5} \times \sin 10° \times \sin 30° \times \sin 50° \times \sin 70° = \frac{\sqrt{2}}{2^6} \times \sin 10° \times \sin 50° \times \sin 70°$

$= \frac{\sqrt{2}}{2^6} \times \frac{\cos 10°}{cos10°} \times \sin 10° \times \sin 50° \cos 20° = \frac{\sqrt{2}}{2^7 \cos 10°} \times \sin 20° \times \cos 20° \times \sin 50°$

$= \frac{\sqrt{2}}{2^8 \cos 10°} \times \sin 40° \times \cos 40° = \frac{\sqrt{2}}{2^9 \cos 10°} \times \sin 80° = \frac{\sqrt{2}}{2^9 \cos 10°} \times \cos 10° = \frac{\sqrt{2}}{2^9}$

ដូចនេះ ចម្លើយគឺ B. P=$\frac{\sqrt{2}}{2^9}$

9. រកតម្លៃតូចបំផុតនៃកន្សោម $(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\cdots(1+a_{2022})$

តាមវិសមភាព Cauchy ពីរតួរ $x + y \geq 2\sqrt{xy}$

គេបាន $1 + a_1 \geq 2\sqrt{a_1} = 4$

$1 + a_2 \geq 2\sqrt{a_2} = 4$

$1 + a_3 \geq 2\sqrt{a_3} = 4$

$1 + a_4 \geq 2\sqrt{a_4} = 4$

… … … … … … … … … …

$1 + a_{2022} \geq 2\sqrt{a_{2022}} = 4$

នាំឲ្យ $(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\cdots(1+a_{2022}) \geq \underbrace{4 \times 4 \times 4 \times \ldots \times 4}_{\text{មាន}2022}$

$\geq 4^{2022}$

គេបានតម្លៃតូចបំផុតនៃ $(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\cdots(1+a_{2022})$គឺ 4^{2022}

ដូចនេះ ចម្លើយគឺ E. មិនមានចម្លើយខាងលើ

10. គណនាតម្លៃ a+b

តាង N= $\overline{135a4b}$

ដោយ $45 = 9\times 5$ ហើយ $\gcd(9,5) = 1$

គេបានចំនួន N ចែកដាច់នឹង 45 កាលណា $\begin{cases} 9|\ N(1) \\ 5|\ N\ (2) \end{cases}$

តាម (2) គេបាន $b\in\{0,5\}$

. ករណី b=0 នោះ N= $\overline{135a4b}$ ចែកដាច់នឹង 9 គេបាន $9|1+3+5+a+4+0$ សមមូល $9|a+4$ នាំឲ្យ $a=5$

. ករណី b=5 នោះ N= $\overline{135a4b}$ ចែកដាច់នឹង 9 គេបាន $9|1+3+5+a+4+5$ សមមូល $9|a$ នាំឲ្យ $a\in\{0,9\}$

នាំឲ្យ $(a,b)\in\{(0,5),(5,0),(9,5)\}$

ដូចនេះ ចម្លើយគឺ C. 14

11. គណនា P

តាង$g(x) = f(x) - x$ នោះ $g(x)$ជាពហុធាដឺក្រេទី 4

គេបាន $g(1) = f(1) - 1 = 1 - 1 = 0$

$g(2) = f(2) - 2 = 2 - 2 = 0$
$g(3) = f(3) - 3 = 3 - 3 = 0$

នោះ x=1, x=2, x=3 ជាឫសនៃសមីការនិងតាងα ជាឫសមួយទៀតនៃពហុធា $g(x)$

គេបាន $g(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-\alpha)$ តែ $g(x) = f(x) - x$

នាំឲ្យ $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-\alpha) + x$

$f(2022) = 2021\times 2020\times 2019\times (2022-\alpha) + 2022$
$f(-2018) = (-2019)(-2020)(-2021)(2018-\alpha) - 2018 = 2018\times 2019\times 2020\times 2021 + 2019\times 2020\times 2021\times \alpha - 2018$

គេបាន $f(2022) + f(-2018) - 4 = 2019\times 2020\times 2021\times 2022 - 2018\times 2019\times 2020\times 2021$

នាំឲ្យ $\frac{f(2022)+f(-2018)-4}{2019\times 2020\times 2021} = \frac{2019\times 2020\times 2021\times 2022-2018\times 2019\times 2020\times 2021}{2019\times 2020\times 2021}$

P = $\frac{f(2022)+f(-2018)-4}{2019\times 2020\times 2021} = 2022 + 2018 = 4040$

ដូចនេះ ចម្លើយគឺ C.4040

12. រកលេខខាងចុងនៃ S

គេមាន 1! មានលេខខាងចុង 1

2! មានលេខខាងចុង 2

3! មានលេខខាងចុង 6

4! មានលេខខាងចុង 4

5! មានលេខខាងចុង 0

6! មានលេខខាងចុង 0

…………………………………

2020! មានលេខខាងចុង 0

នោះ S = 1! +2! +3! +4! + ⋯ + 2022! មានលេខខាងចុង 3

ដូចនេះ ចម្លើយគឺ D.3

13. រកសំណុំចម្លើយនៃសមីការ

សមីការមានន័យកាលណា $x \in -\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{(2k+1)\pi}{(4k+1)2}\right\}$

គេបាន $\tan(4k+2)x - \tan(4k+1)\,x - \tan(4k+2)x \cdot \tan(4k+1)\,x = 1$

$$\tan(4k+2)x - \tan(4k+1)\,x = 1 + \tan(4k+2)x \cdot \tan(4k+1)\,x$$

$$\frac{\tan(4k+2)x - \tan(4k+1)x}{1+\tan(4k+2)x \cdot \tan(4k+1)x} = 1$$

នាំឲ្យ $\tan[(4k+2)-(4k-1)x] = 1$

$$\tan x = 1$$

$$x = n\pi + \frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z}$$

ដូចនេះ ចម្លើយគឺ C. $\left\{n\pi + \frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z}\right\}$

14. គណនាតួទី នៃស្វ៊ីត

គេមាន $u_1 = 1$ និង $u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+u_n} + u_n$

បើ n=1 នោះ $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}+u_1} + u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}+1} + 1 = \sqrt{2} - 1 + 1 = \sqrt{2}$

បើ n=2 នោះ $u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}+u_2} + u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + 1 = \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{2} = \sqrt{3}$

………

សន្និដ្ឋាន $u_n = \sqrt{n}$

. បើ n=1 នោះ $u_1 = \sqrt{1} = 1$ ពិត

. ឧបមាពិតរហូតដល់ n គឺ $u_n = \sqrt{n}$

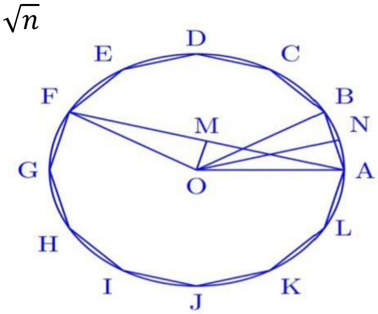
. ស្រាយថាពិតរហូតដល់ n+1 គឺស្រាយថា $u_{n+1} = \sqrt{n+1}$

គេមាន $u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+u_n} + u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} - \sqrt{n} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} + \sqrt{n}$

តាមអនុមានរួមគណិតវិទ្យា គេបាន $u_n = \sqrt{n}$ គ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

នាំឲ្យ $u_{2022} = \sqrt{2022}$

ដូចនេះ ចម្លើយគឺ D. $u_{2022} = \sqrt{2022}$



15. គណនា $\frac{AB}{AF} + \frac{AF}{AB}$

គេមាន $S_{OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB \sin 30° = \frac{1}{2} R^2 \sin 30°$

និង $S_{OAF} = \frac{1}{2} OA \cdot OF \sin 150° = \frac{1}{2} R^2 \sin 30°$

គេបាន $S_{OAB} = S_{OAF}$

តែ $S_{OAB} = \frac{1}{2}AB \cdot ON$និង $S_{OAF} = \frac{1}{2}AF \cdot OM$

គេបាន $\frac{1}{2}AB \cdot ON = \frac{1}{2}AF \cdot OM$ សមមូល $\frac{AB}{AF} = \frac{OM}{ON} = \frac{OA\cos 15°}{OA\sin 15°} = \frac{\sin 15°}{\cos 15°}$

នោះ $\frac{AB}{AF} + \frac{AF}{AB} = \frac{\sin 15°}{\cos 15°} + \frac{\cos 15°}{\sin 15°} = \frac{\sin^2 15° + \cos^2 15°}{\sin 15° \cos 15°} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sin 30°} = 4$

ដូចនេះ ចម្លើយគឺ C.4