

វិញ្ញាសារប្រកួតប្រជែងគណិតវិទ្យា MOSC ថ្នាក់ទី១២

សម័យប្រលង៖

រយៈពេល៖ ៩០នាទី

1. រកតម្លៃនៃ n បើគេដឹងថាមេគុណនៃបីតួរបន្តគ្នារបស់ $(1+x)^n$ គឺ 45, 120 និង 210 ។

- A. 8
- B. 12
- C. 10
- D. 25
- E. ចម្លើយផ្សេង

2. គេឱ្យ $(x-1)^r$ ជាកត្តាមួយនៃពហុធា $2x^{P+1} - P(P+1)x^2 + 2(P^2-1)x - P(P-1)$ សម្រាប់គ្រប់ចំនួនគត់ $P \geq 3$ ។
រកតម្លៃធំបំផុតនៃចំនួនគត់ r ។

- A. P
- B. 4
- C. 1
- D. 3
- E. ចម្លើយផ្សេង

3. រកសំណល់ $R(x)$ នៃការចែករវាង x^{100} នឹង $x^2 - 3x + 2$ ។

- A. $2^{100} - 1$
- B. $(2^{100} - 1)x - 2(2^{99} - 1)$
- C. $2^{100}x - 3 \times 2^{100}$
- D. $(2^{100} - 1)x + 2(2^{99} - 1)$

E. ចម្លើយផ្សេង

4. រកគ្រប់ចំនួនពិត x ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $x^2 + 4|x| - 4 = 0$ ។

A. $-2 \pm 2\sqrt{2}$

B. $2 \pm 2\sqrt{2}$

C. $-2 \pm 2\sqrt{2}, 2 \pm 2\sqrt{2}$

D. $\pm(2\sqrt{2} - 2)$

E. ចម្លើយផ្សេង

5. រកផលបូកនៃគ្រប់ចំនួនទាំងអស់ចម្លោះ 200 ទៅ 400 និងចែកដាច់នឹង 7 ។

A. 9872

B. 7289

C. 8729

D. 8279

E. ចម្លើយផ្សេង

6. រកតម្លៃនៃផលបូក $S = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + 50 \cdot 50!$ ។

A. $51!$

B. $2 \times 51!$

C. $51! - 1$

D. $51! + 1$

E. ចម្លើយផ្សេង

7. គណនាតម្លៃនៃ $M = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}$ ។

A. $\frac{73}{1320}$

B. $\frac{733}{11880}$

C. $\frac{73}{440}$

D. $\frac{1}{18}$

E. ចម្លើយផ្សេង

8. រកចំនួនចម្លើយនៃប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} |z + 1 - i| = \sqrt{2} \\ |z| = 3 \end{cases}$$

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

E. ចម្លើយផ្សេង

9. រកចំនួនគូចម្លើយ (x, y) នៃចំនួនពិតរបស់សមីការ $2x^2 + y^2 + 2xy - 2y + 2 = 0$ ។

A. 0

B. 1

C. 2

D. មិនកំណត់

E. ចម្លើយផ្សេង

10. គណនាលីមីត $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1 \times 3}{2n^3} + \frac{3 \times 5}{2n^3} + \frac{5 \times 7}{2n^3} + \dots + \frac{(2n-1)(2n+1)}{2n^3} \right]$ ។

A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{1}{3}$

C. 0

D. 2

E. ចម្លើយផ្សេង

11. គេឱ្យ $\left| \frac{n^2+n+1}{3n^2+1} - \frac{1}{3} \right| < \frac{1}{10}$ ដែល $n \in \mathbb{N}$ ។ រកតម្លៃទាបបំផុតនៃ n ។

A. 4

B. 5

C. 6

D. 7

E. ចម្លើយផ្សេង

12. គេឱ្យ $M = \frac{x(1+y)+y(1+z)+z(1+x)}{\sqrt{xyz}}$ ។ រកតម្លៃទាបបំផុតនៃកន្សោម M ។

A. 5

B. 6

C. 7

D. 8

E. ចម្លើយផ្សេង

13. គេមាន $K = 4^2 + 2 \times 5^2 + 3 \times 6^2 + \dots + 27 \cdot 30^2$ ។ រកផលបូកនៃកន្សោម K ។

A. 234561

B. 654738

C. 348543

D. 187866

E. ចម្លើយផ្សេង

14. $\ell = \frac{a^2}{2a^2+bc} + \frac{b^2}{2b^2+ac} + \frac{c^2}{2c^2+ab}$ គេមាន $a + b + c = 0$ ។ រកតម្លៃនៃ ℓ ។

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

E. ចម្លើយផ្សេង

15. គេមាន $a^2 - b = b^2 - c = c^2 - a$ ។ រកតម្លៃនៃ $(a + b)(b + c)(c + a)$ ។

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

E. ចម្លើយផ្សេង

ដំណោះស្រាយវិញ្ញាសាកប្រកួតប្រជែងគណិតវិទ្យា MOSC ជំពូកទី១២

សម័យប្រលង៖

រយៈពេល៖ ៩០នាទី

1. រកតម្លៃនៃ n

គេមានបីតួបន្តបន្ទាប់គ្នានៃការពន្លាត $(1+x)^n$ គឺ 45, 120 និង 210

ដោយ $(1+x)^n = C_0^n + C_1^n x + C_2^n x^2 + \dots + C_n^n x^n$

នាំឱ្យ $C_{r-1}^n = 45, C_r^n = 120, C_{r+1}^n = 210 \quad ; n, r \in \mathbb{N}$

$$\text{នោះ: } \frac{C_1^n}{C_{r-1}^n} = \frac{120}{45}$$

$$\frac{\frac{n!}{(n-1)!r!}}{\frac{n!}{(n-r+1)!(r-1)!}} = \frac{8}{3}$$

$$\frac{(n-r+1)!(r-1)!}{(n-r)!r!} = \frac{8}{3}$$

$$\frac{(n-r+1)(n-r)!(r-1)!}{(n-r)!r(r-1)!} = \frac{8}{3}$$

$$\frac{n-r+1}{r} = \frac{8}{3}$$

$$3n - 3r + 3 = 8r$$

$$3n + 3 = 11r \quad (1)$$

$$\text{នោះ: } \frac{C_{r+1}^n}{C_r^n} = \frac{210}{120}$$

$$\frac{\frac{n!}{(n-r-1)!(r+1)!}}{\frac{n!}{(n-r)!r!}} = \frac{7}{4}$$

$$\frac{(n-r)!r!}{(n-r-1)!(r+1)!} = \frac{7}{4}$$

$$\frac{(n-r)(n-r-1)r!}{(n-r-1)! + (r+1)r!} = \frac{7}{4}$$

$$\frac{n-r}{r+1} = \frac{7}{4}$$

$$4n - 4r = 7r + 7$$

$$4n - 7 = 11r \quad (2)$$

ជំនួស (1) និង (2): $3n + 3 = 4n - 7 \Rightarrow n = 10$

ដូចនេះ $n = 10$

ចម្លើយ: C. 10

2. រកតម្លៃធំបំផុតនៃចំនួនគត់ r

គេមាន $(x-1)^r$ ជាកត្តាមួយនៃពហុធា $2x^{P+1} - P(P+1)x^2 + 2(P^2-1)x - P(P-1)$, $P \geq 3$

តាង $g(x) = 2x^{P+1} - P(P+1)x^2 + 2(P^2-1)x - P(P-1)$

នោះ $g(1) = 2 - P(P+1) + 2(P^2-1) - P(P-1)$

$$= 2 - P^2 - P + 2P^2 - 2 - P^2 + P$$

$$= 0$$

$$g'(x) = 2(P+1)x^P - 2P(P+1)x + 2(P^2-1)$$

$$g'(1) = 2(P+1) - 2P(P+1) + 2P^2 - 2$$

$$= 0$$

$$g'''(x) = 2P(P-1)(P+1)x^{P-2}$$

$$g'''(1) = 2P(P-1)(P+1) \neq 0$$

ដោយ $g(1) = g'(1) = g''(1) = 0$, $g'''(1) \neq 0$

នោះ $(x-1)^r$ ជាកត្តាមួយនៃ $g(x)$ លុះត្រា $r \leq 3$

គេបាន តម្លៃធំបំផុតនៃ r គឺ 3

ដូចនេះ $r = 3$

ចម្លើយ: D. 3

3. រកសំណល់ $R(x)$

គេយក x^{100} ចែកនឹង $x^2 - 3x + 2$

ដោយ $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$

តាង $x^{100} = (x - 1)(x - 2)Q(x) + Ax + B$

$Q(x)$ ជាផលចែក, $Ax + B$ ជាសំណល់

ឱ្យ $x = 1 \Rightarrow A + B = 1 \quad (1)$

$x = 2 \Rightarrow 2A + B = 2^{100} \quad (2)$

យក $(2) - (1): A = 2^{100} - 1$ ជំនួសក្នុង (1)

គេបាន $2^{100} - 1 + B = 1$

$B = -2(2^{99} - 1)$

ទាញបានសំណល់គឺ $R(x) = (2^{100} - 1)x - 2(2^{99} - 1)$

ដូចនេះ $R(x) = (2^{100} - 1)x - 2(2^{99} - 1)$

ចម្លើយ: B. $(2^{100} - 1)x - 2(2^{99} - 1)$

4. រកគ្រប់ចំនួនពិត x

គេមានសមីការ $x^2 + 4|x| - 4 = 0$

ឧបមាថា $x \geq 0$

នោះ $x^2 + 4x - 4 = 0$

$\Delta' = 4 + 4$

$\sqrt{\Delta'} = 2\sqrt{2}$

គេបាន $x = -2 \pm 2\sqrt{2}$

តែ $x \geq 0 \Rightarrow x = -2 - 2\sqrt{2}$ មិនយក

ឧបមាថា $x < 0$

នោះ $x^2 - 4x - 4 = 0$

$$\Delta' = 4 + 4$$

$$\sqrt{\Delta'} = 2\sqrt{2}$$

គេបាន $x = 2 \pm 2\sqrt{2}$

តែ $x < 0 \Rightarrow x = 2 + 2\sqrt{2}$ មិនយក

គេបាន $x = -2 + 2\sqrt{2}$ ឬ $x = 2 - 2\sqrt{2}$

អាចសរសេរ $x = \pm(2\sqrt{2} - 2)$

ដូចនេះ $x = \pm(2\sqrt{2} - 2)$

ចម្លើយ: D. $x = \pm(2\sqrt{2} - 2)$

5. រកផលបូក

ចំនួនដែលនៅចន្លោះ 200 ទៅ 400 ហើយចែកជាចំនួន 7 មាន 203, 210, 217, ..., 399

រាងទូទៅគឺ $196 + 7, 196 + 7 \times 2, \dots, 196 + 7 \times 29$

$$\begin{aligned} \text{គេបានផលបូក } \sum_{K=1}^{29} (196 + 7K) &= \sum_{K=1}^{29} 196 + 7 \sum_{K=1}^{29} K \\ &= 196 \times 29 + 7 \times \frac{1}{2} \times 29 \times 30 \\ &= 8729 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ } \sum_{K=1}^{29} (196 + 7K) = 8729$$

ចម្លើយ: C. 8729

6. រកតម្លៃនៃផលបូក S

ដោយ $S = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + 50 \cdot 50!$

$$\begin{aligned} &= (2! - 1!) + (3! - 2!) + (4! - 3!) + \dots + (51! - 50!) \\ &= (2! - 1!) + (3! - 2!) + (4! - 3!) + \dots + (51! - 50!) \\ &= -1 + 51! \end{aligned}$$

အဖြေ: C.51! - 1!

8. រកចំនួនចម្លើយនៃប្រព័ន្ធសមីការ

$$\text{គេមានប្រព័ន្ធសមីការ} \begin{cases} |z + 1 - i| = \sqrt{2} & (1) \\ |z| = 3 & (2) \end{cases}$$

$$\text{តាង } z = a + bi; a, b \in \mathbb{R}$$

$$\text{តាម (1): } |a + bi + 1 - i| = \sqrt{2}$$

$$|(a + 1) + (b - 1)i| = \sqrt{2}$$

$$\text{នាំឱ្យ } (a + 1)^2 + (b - 1)^2 = 2$$

$$a^2 + b^2 + 2a - 2b = 0 \quad (3)$$

$$\text{តាម (2): } |z| = 3$$

$$|a + bi| = 3$$

$$\text{នាំឱ្យ } a^2 + b^2 = 9 \quad (4)$$

$$\text{យក (1) - (2): } 2a - 2b = -9$$

$$b = a + \frac{9}{2} \quad \text{ជំនួសក្នុង} \quad (3)$$

$$\text{គេបាន } a^2 + \left(a + \frac{9}{2}\right)^2 = 9$$

$$2a^2 + 9a + \frac{81}{4} = 9$$

$$8a^2 + 36a + 45 = 0$$

$$\Delta' = 18^2 - 8 \times 45$$

$$= -36 < 0$$

$$\text{នោះ } a \notin \mathbb{R}$$

ទាញបានប្រព័ន្ធសមីការគ្មានដំណើរ

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធសមីការគឺ ០

ចម្លើយ៖ A. 0

9. រកចំនួនគូចឡើយ (x, y)

$$\text{គេមានសមីការ } 2x^2 + y^2 + 2xy - 2y + 2 = 0$$

$$2x^2 + 2xy + (y^2 - 2y + 2) = 0 \quad (1)$$

ឧបមាថា y ជាចំនួនថេរ

នោះ សមីការជាសមីការដឺក្រេទី២

$$\text{មាន } \Delta = (2y)^2 - 4 \times 2 (y^2 - 2y + 2)$$

$$\begin{aligned} &= 4y^2 - 8y^2 + 16y - 16 \\ &= -4y^2 - 8y^2 + 16y - 16 \\ &= -4(y - 2)^2 \end{aligned}$$

ដើម្បីបានឬសជាចំនួនពិតលុះត្រាតែ $\Delta \geq 0$

$$\Delta = -4(y - 2)^2 \geq 0$$

$$(y - 2)^2 \leq 0$$

$$\text{តែ } (y - 2)^2 \geq 0$$

$$\text{នោះ } (y - 2)^2 = 0 \Rightarrow y = 2 \text{ ជំនួសក្នុង (1)}$$

$$\text{គេបាន } 2x^2 + 4x + 2 = 0$$

$$2(x + 1)^2 = 0$$

$$(x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow x = -1$$

ដូចនេះ គូបម្លើយគឺ $(-1, 2)$

ចម្លើយ៖ $B. -1, 2$

10. គណនាលីមីត

$$\text{គេមាន } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1 \times 3}{2n^3} + \frac{3 \times 5}{2n^3} + \frac{5 \times 7}{2n^3} + \dots + \frac{(2n-1)(2n+1)}{2n^3} \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1 \times 3 + 3 \times 5 + 5 \times 7 + \dots + (2n-1)(2n+1)}{2n^3} \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\sum_{k=1}^n (2k-1)(2k+1)}{2n^3} \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{4 \sum_{k=1}^n (k^2) - \sum_{k=1}^n (1)}{2n^3} \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{4 \times \frac{1}{6} \times n(n+1)(2n+1) - n}{2n^3} \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\frac{1}{3} n^3 \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) - \frac{n^3}{n^2}}{2n^3} \right]$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \times (1+0)(2+0) - 0}{1}$$

$$= \frac{2}{3}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1 \times 3}{2n^3} + \frac{3 \times 5}{2n^3} + \frac{5 \times 7}{2n^3} + \dots + \frac{(2n-1)(2n+1)}{2n^3} \right] = \frac{2}{3}$$

$$\text{ចម្លើយ: } A. \frac{2}{3}$$

11. រកតម្លៃទាបបំផុតនៃ n

$$\text{គេឱ្យ } \left| \frac{n^2 + n + 1}{3n^2 + 1} - \frac{1}{3} \right| < \frac{1}{10}, n \in \mathbb{N}$$

$$\left| \frac{(n^2 + n + 1) \times 3 - (3n^2 + 1)}{3(3n^2 + 1)} \right| < \frac{1}{10}$$

$$\left| \frac{3n + 2}{3(3n^2 + 1)} \right| < \frac{1}{10}$$

ដោយ $3(3n^2 + 1) > 0$ ជានិច្ច

$$\text{នោះ: } 10|3n + 2| < 3(3n^2 + 1)$$

$$\text{តែ } n \in \mathbb{N} \Rightarrow 3n + 2 > 0$$

$$\text{នាំឱ្យ } 10(3n + 2) < 9n^2 + 3$$

$$30n + 20 < 9n^2 + 3$$

$$9n^2 - 30n + 25 > 17 + 25$$

$$(3n - 5)^2 > 42$$

$$3n - 5 > \sqrt{42}$$

$$3n > 5 + \sqrt{42}$$

$$3n > 11 + f \quad (0 < f < 1)$$

$$n > \frac{11}{3} + \frac{f}{3}$$

$$n > 3 + f' \quad (0 < f' < 1)$$

ដូចនេះ: $n \geq 4$ តម្លៃតូចបំផុតគឺ 4

$$\text{ចម្លើយ: } A. 4$$

12. រកតម្លៃទាបបំផុតនៃកន្សោម M

$$\begin{aligned}\text{គេមាន } M &= \frac{x(1+y) + y(1+z) + z(1+x)}{\sqrt{xyz}} \\ &= \frac{x+y+z+xy+yz+xz}{\sqrt{xyz}}\end{aligned}$$

តាមវិសមភាព ($AM \geq GM$)

$$x+y+z+xy+yz+xz \geq 6\sqrt[6]{x \cdot y \cdot z \cdot (xy) \cdot (yz) \cdot (xz)}$$

$$x+y+z+xy+yz+xz \geq 6\sqrt{xyz}$$

$$\text{គេបាន } M \geq \frac{6\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}} = 6$$

ដូចនេះ តម្លៃទាបបំផុតនៃ M គឺ 6

ចម្លើយ៖ B. 6

13. រកផលបូកនៃកន្សោម K

$$\text{គេមាន } K = 4^2 + 2 \times 5^2 + 3 \times 6^2 + \cdots + 27 \cdot 30^2$$

$$\begin{aligned}&= \sum_{R=1}^{27} R(R+3)^2 \\ &= \sum_{R=1}^{27} (R^3 + 6R^2 + 9R) \\ &= \sum_{R=1}^{27} R^3 + 6 \sum_{R=1}^{27} R^2 + 9 \sum_{R=1}^{27} R \\ &= \left(\frac{27 \times 28}{2}\right)^2 + 6 \times \frac{1}{6} \times 27 \times 28 \times 55 + 9 \times \frac{1}{2} \times 27 \times 28\end{aligned}$$

$$\text{គេបាន } K = 187866$$

$$\text{ដូចនេះ } K = 187866$$

ចម្លើយ៖ D. 187866

14. រកតម្លៃនៃ ℓ

$$\text{គេមាន } a+b+c=0$$

$$\ell = \frac{a^2}{2a^2+bc} + \frac{b^2}{2b^2+ac} + \frac{c^2}{2c^2+ab}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{a^2(2b^2 + ac)(ac^2 + ab) + b^2(2a^2 + ab) + c^2(2a^2 + bc)(2b^2 + ac)}{(2a^2 + bc)(2b^2 + ac)(2c^2 + ab)} \\
 &= \frac{(4a^2b^2c^2 + 2a^3b^3 + 2a^3c^3 + a^4bc) + (4a^2b^2c^2 + 2a^3b^3 + 2b^3c^3 + ab^4c) + (4a^2b^2c^2 + 2a^3c^3 + 2b^3c^3 + abc^4)}{8a^2b^2c^2 + 4a^3b^3 + 4a^3c^3 + 2a^4bc + 4b^3c^3 + 2b^4ac + 2b^4ac + a^2b^2c^2} \\
 &= \frac{12a^2b^2c^2 + abc(a^3b^3c^3) + 4(a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3)}{9a^2b^2c^2 + 2abc(a^3 + b^3 + c^2) + 4(a^3b^3 + b^3c^3 + a^3c^3)}
 \end{aligned}$$

ដោយ $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$$

នាំឱ្យ $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

$$\begin{aligned}
 \text{តើបាន } \ell &= \frac{12a^2b^2c^2 + abc(3abc) + 4(a^3b^3 + b^3c^3 + a^3c^3)}{9a^2b^2c^2 + 2abc(3abc) + 4(a^3b^3 + b^3c^3 + a^3c^3)} \\
 &= \frac{15a^2b^2c^2 + 4(a^3b^3 + b^3c^3 + a^3c^3)}{15a^2b^2c^2 + 4(a^3b^3 + b^3c^3 + a^3b^3)} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\ell = 1$

ចម្លើយ៖ A.1

15. វិកតម្លៃនៃ $(a + b)(b + c)(c + a)$

តើមាន $a^2 - b = b^2 - c = c^2 - a$

$$a^2 - b = b^2 - c$$

$$a^2 - b^2 = b - c$$

$$(a + b)(a - b) = b - c$$

$$a + b = \frac{b - c}{a - b} \quad (1)$$

$$a^2 - b = c^2 - a$$

$$a^2 - b^2 = b - a$$

$$(a + b)(a - c) = b - a$$

$$(a + c) = \frac{b - a}{a - c} \quad (2)$$

$$b^2 - c = c^2 - a$$

$$b^2 - c^2 = c - a$$

$$(b + c)(b - c) = c - a$$

$$(b + c) = \frac{c - a}{b - c} \quad (3)$$

$$\begin{aligned}\text{យក } (1) \times (2) \times (3): (a+b)(a+c)(b+c) &= \left(\frac{b-c}{a-b}\right) \left(\frac{b-a}{a-c}\right) \left(\frac{c-a}{b-c}\right) \\ &= \left(\frac{b-c}{b-c}\right) \left(\frac{b-a}{a-b}\right) \left(\frac{c-a}{a-c}\right)\end{aligned}$$

$$\text{គេបាន } (a+b)(b+c)(a+c) = 1$$

$$\text{ដូច្នេះ: } (a+b)(b+c)(a+c) = 1$$

ចម្លើយ: B. 1