dr inż. Magdalena Budnarowska

m.budnarowska@we.umg.edu.pl

Teams: Magdalena Budnarowska

Discord: magdalenabudnarowska

Ochrona elektroniki przed atakami elektromagnetycznymi

Skuteczność ekranowania wnętrza metalowych obudów z otworami

Metamateriały jako absorbery promieniowania EM

MATERIAŁ UZUPEŁNIAJĄCY

RÓWNANIA MAXWELLA

POCZĄTEK

RÓWNANIA MAXWELLA

Przed Maxwellem naukowcy mieli już kilka oddzielnych praw opisujących zjawiska elektryczne i magnetyczne:

01 **Prawo Coulomba** – określało siłę oddziaływania między ładunkami elektrycznymi.

02 **Prawo Gaussa dla elektryczności** – opisywało, jak ładunki elektryczne generują pole elektryczne, pokazując, że całkowity strumień pola elektrycznego przez zamkniętą powierzchnię jest proporcjonalny do ładunku wewnątrz tej powierzchni.

03 **Prawo Ampère'a** – mówiło o tym, jak przepływ prądu wytwarza pole magnetyczne.

04 **Prawo Faradaya indukcji** – wyjaśniało, w jaki sposób zmienne w czasie pole magnetyczne indukuje pole elektryczne.

Te prawa działały osobno i nie tworzyły jednolitej teorii, która opisywałaby wzajemne zależności między polami elektrycznym i magnetycznym.

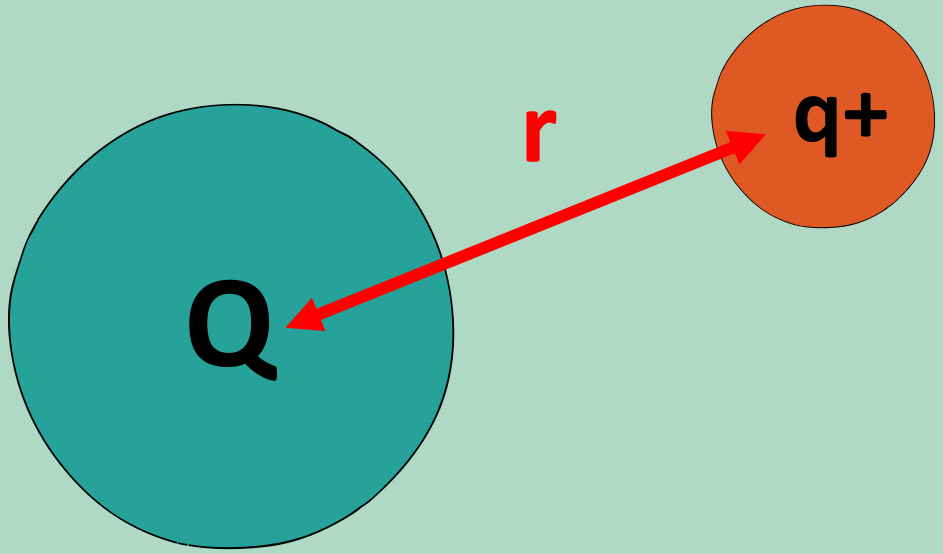
01

Prawo Coulomba

- opis statycznych oddziaływań
- określa siłę oddziaływania między ładunkami elektrycznymi

Jeżeli pole elektryczne jest wytworzone przez ładunek punktowy ***Q*** to zgodnie z prawem Coulomba siła działająca na ładunek próbny ***q*** umieszczony w odległości **r** od tego ładunku wynosi:

$$\mathrm{F} = k\frac{Qq}{r^2}$$



stała $k = 1/4\pi\varepsilon_0$. Współczynnik ε_0 = $8.854 \cdot 10^{-12}$ $C^2/(Nm^2)$

01

Prawo Coulomba

prawo Gaussa dla elektryczności (wynika z prawa Coulomba)

Maxwell nie zmienił bezpośrednio prawa Coulomba, ale umieścił je w szerszym kontekście swojej ogólnej teorii elektromagnetyzmu. Prawo Coulomba opisuje oddziaływanie między dwoma ładunkami w stanie statycznym, a jego wynik można wyprowadzić z **prawa Gaussa dla elektryczności,** które w zapisie różniczkowym wygląda tak:

$$\nabla \cdot \mathrm{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Dla warunków statycznych rozwiązanie tego równania daje rozkład pola elektrycznego zgodny z **prawem Coulomba**.

Kluczową zmianą wprowadzonej przez Maxwella jest jednak rozszerzenie teorii o przypadki dynamiczne – czyli uwzględnienie sytuacji, gdy pola zmieniają się w czasie.

01

Prawo Coulomba

prawo Gaussa dla elektryczności (wynika z prawa Coulomba)

Maxwell nie zmienił bezpośrednio prawa Coulomba, ale umieścił je w szerszym kontekście swojej ogólnej teorii elektromagnetyzmu. Prawo Coulomba opisuje oddziaływanie między dwoma ładunkami w stanie statycznym, a jego wynik można wyprowadzić z **prawa Gaussa dla elektryczności,** które w zapisie różniczkowym wygląda tak:

$$\nabla \cdot \mathrm{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

operator różniczkowy nabla

Gradient opisuje tangens kąta nachylenia wykresu funkcji w danym punkcie

$$grad\ f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

$\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ - jednostkowe wektory bazowe przestrzeni

Wektor ten wskazuje kierunek największego wzrostu funkcji w danym punkcie, natomiast długość tego wektora opisuje wielkość tego wzrostu

01

Prawo Gaussa dla elektryczności

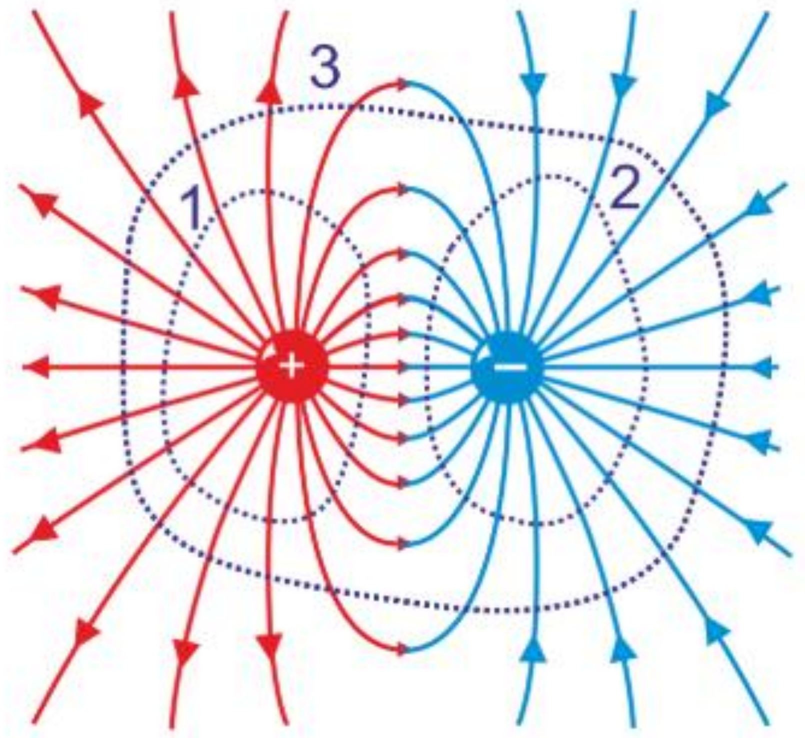
prawo Gaussa dla elektryczności (wynika z prawa Coulomba)

Prawo Gaussa dla elektryczności mówi, że całkowity "przepływ" (czyli suma wektorowa) pola elektrycznego przez zamkniętą powierzchnię zależy wyłącznie od ładunku znajdującego się wewnątrz tej powierzchni.

- Rozpatrzmy zamkniętą powierzchnię obejmującą dwa ładunki Q_1 i Q_2. Całkowity strumień (liczba linii sił) przechodzący przez powierzchnię otaczającą ładunki Q_1 i Q_2 jest równy:

$$\phi_c = \oint \boldsymbol{E}\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint (\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2)\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint \boldsymbol{E}_1\mathrm{d}\boldsymbol{S} + \oint \boldsymbol{E}_2\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

gdzie pole E_1 jest wytwarzane przez Q_1, a pole E_2 przez Q_2.

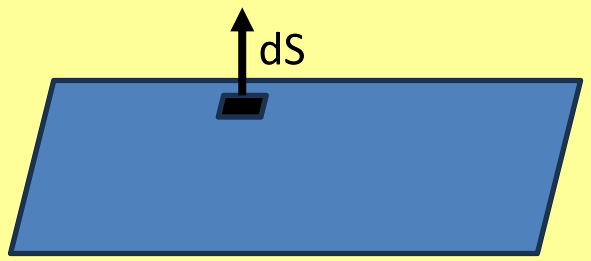


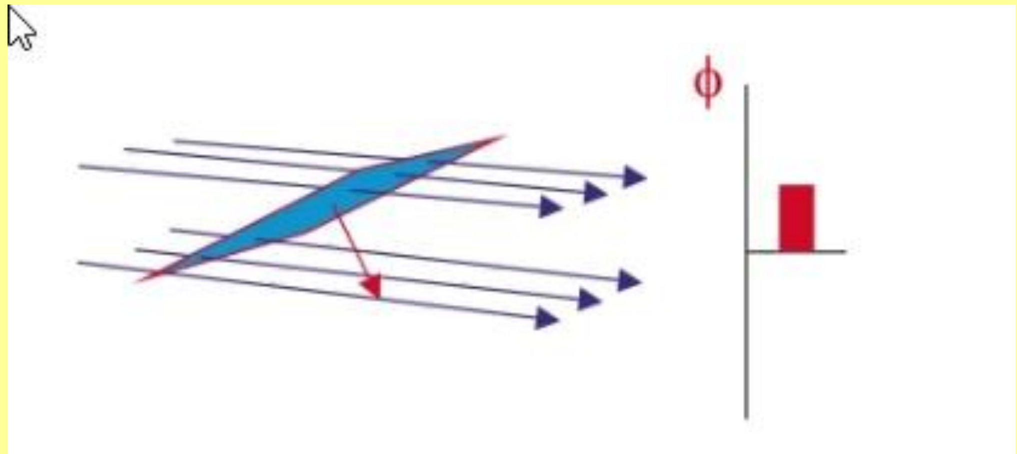
Całkowity strumień przez powierzchnię "1" jest dodatni, strumień przez powierzchnię "2" jest ujemny, a strumień przez powierzchnię "3" jest równy zeru.

Strumień ϕ pola elektrycznego przez powierzchnię S definiujemy jako iloczyn skalarny wektora powierzchni $\boldsymbol{S}$ i natężenia pola elektrycznego $\boldsymbol{E}$.

$$\phi = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{S} = ES\cos\alpha$$

gdzie α jest kątem pomiędzy wektorem powierzchni $\boldsymbol{S}$ i wektorem $\boldsymbol{E}$.

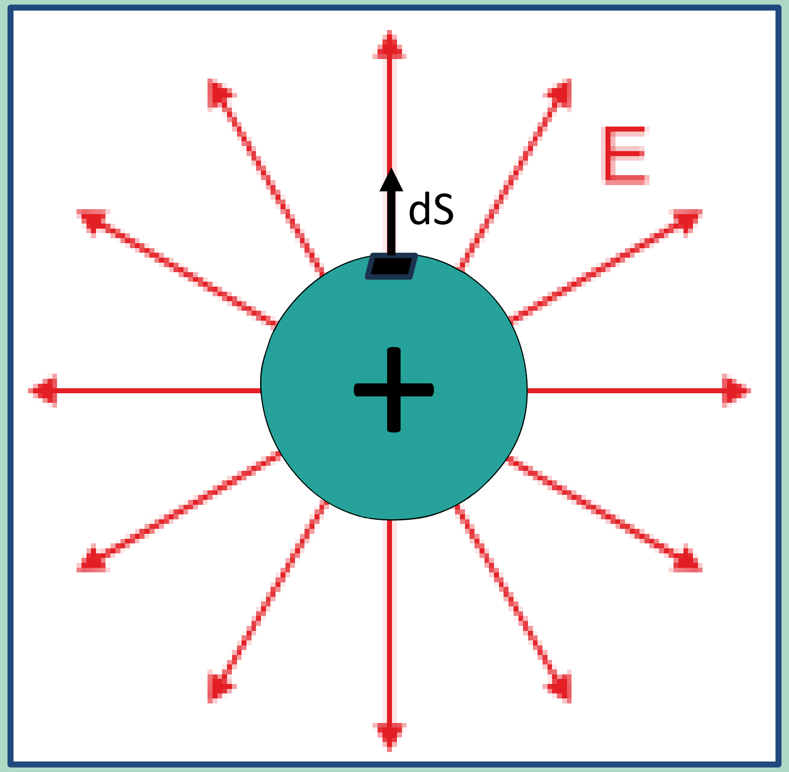




01 Prawo Gaussa dla elektryczności

prawo Gaussa dla elektryczności (wynika z prawa Coulomba)

Strumień dla ładunku punktowego Q w odległości *r* od niego: rysujemy sferę o promieniu *r* wokół ładunku Q i liczymy strumień przechodzących przez tę powierzchnię



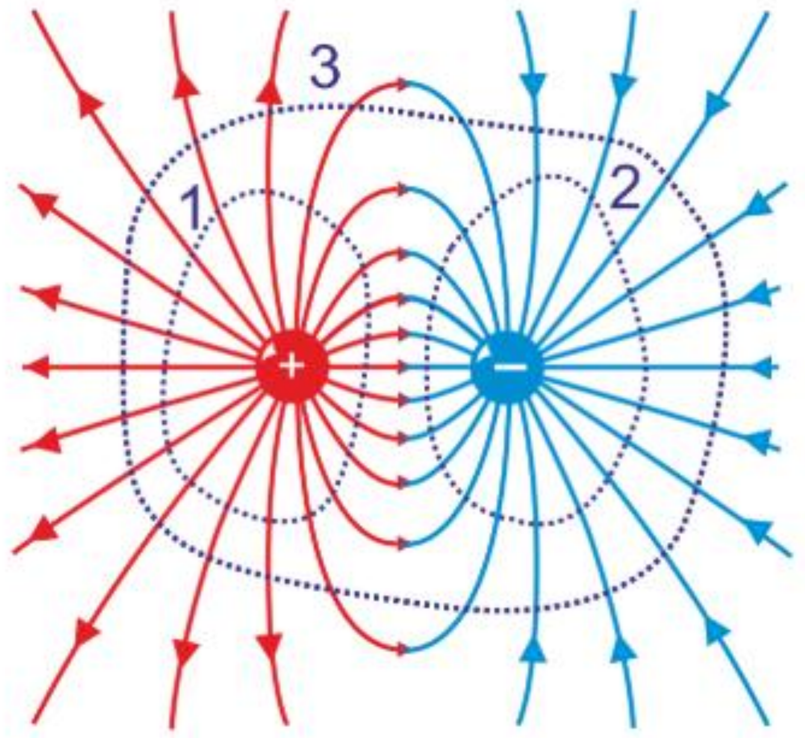
Pole ***E*** ma jednakową wartość w każdym punkcie sfery i jest prostopadłe do powierzchni (równoległe do wektora powierzchni d***S***) więc w każdym punkcie *α* = 0 i całkowity strumień wynosi

$$\phi = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{S} = E(4\pi r^2) = \left(k\frac{Q}{r^2}\right)(4\pi r^2) = 4\pi k Q = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$k = 1/4\pi\varepsilon_0$$

Strumień wychodzący z naładowanego ciała jest równy wypadkowemu ładunkowi tego ciała podzielonemu przez ε_0.

Jeżeli wypadkowy ładunek ciała jest ujemny to strumień pola elektrycznego, tak jak i linie pola, wpływa do ciała. Natomiast gdy ładunek wypadkowy wewnątrz zamkniętej powierzchni jest równy zeru to całkowity strumień też jest równy zeru; tyle samo linii pola wpływa jak i wypływa przez powierzchnię Gaussa.

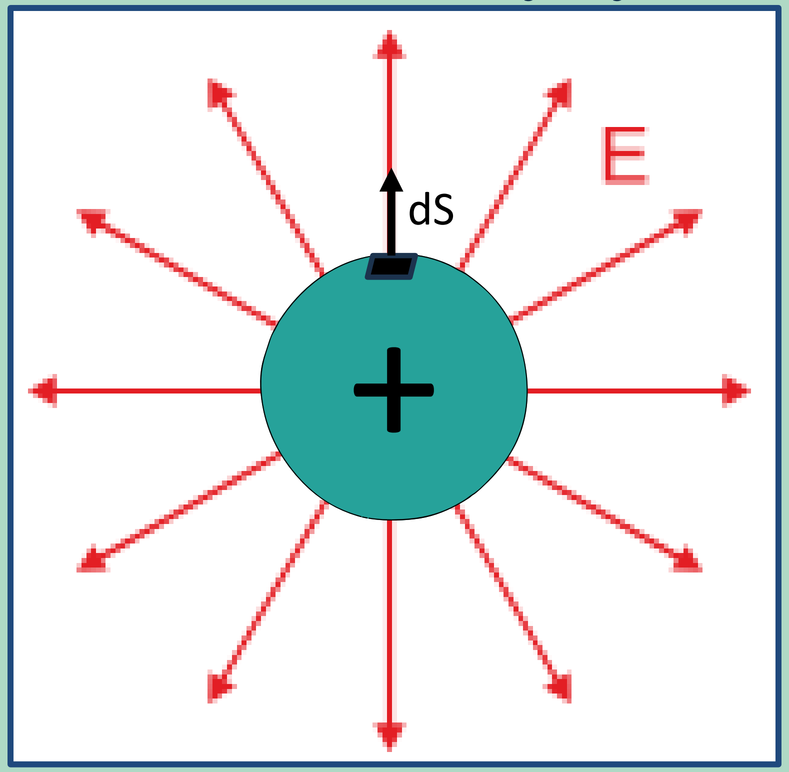


Całkowity strumień przez powierzchnię "1" jest dodatni, strumień przez powierzchnię "2" jest ujemny, a strumień przez powierzchnię "3" jest równy zeru.

01 Prawo Gaussa dla elektryczności

prawo Gaussa dla elektryczności (wynika z prawa Coulomba)

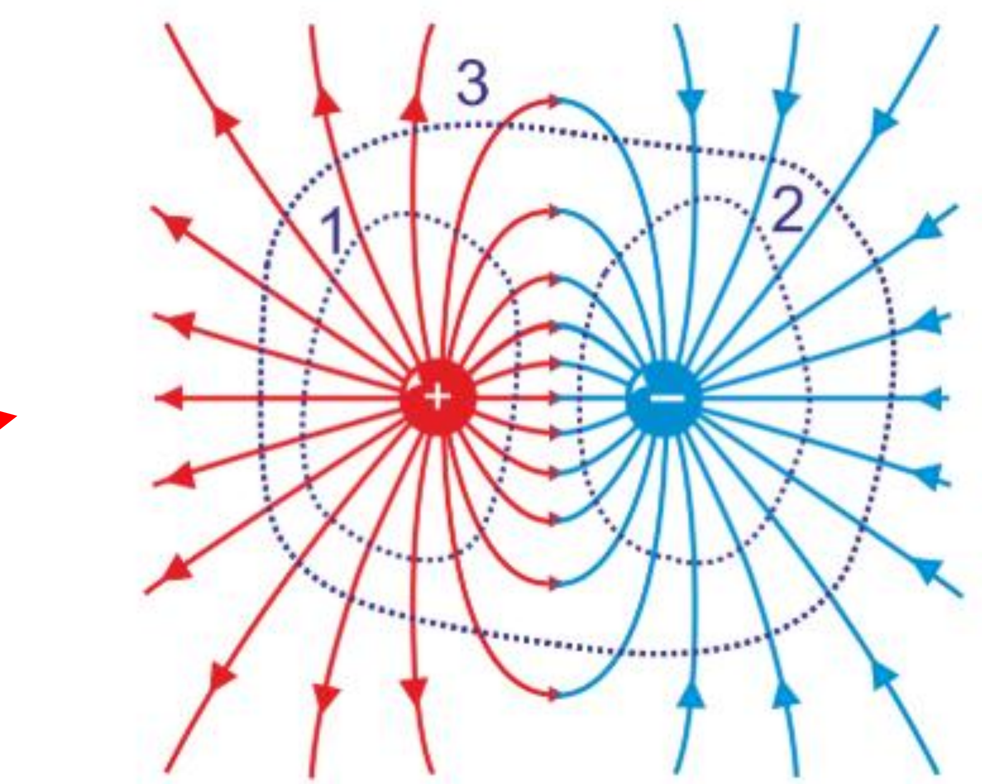
Strumień dla ładunku punktowego Q w odległości *r* od niego: rysujemy sferę o promieniu *r* wokół ładunku Q i liczymy strumień przechodzących przez tę powierzchnię



Pole ***E*** ma jednakową wartość w każdym punkcie sfery i jest prostopadłe do powierzchni (równoległe do wektora powierzchni d***S***) więc w każdym punkcie $\alpha = 0$ i całkowity strumień wynosi

$$\phi = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{S} = E(4\pi r^2) = \left(k\frac{Q}{r^2}\right)(4\pi r^2) = 4\pi k Q = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\phi_c = \frac{Q_1}{\varepsilon_0} + \frac{Q_2}{\varepsilon_0} = \frac{Q_1 + Q_2}{\varepsilon_0}$$



Całkowity strumień przez powierzchnię "1" jest dodatni, strumień przez powierzchnię "2" jest ujemny, a strumień przez powierzchnię "3" jest równy zeru.

Całkowity strumień pola elektrycznego przez zamkniętą powierzchnię jest więc równy *całkowitemu ładunkowi* otoczonemu przez tę powierzchnię podzielonemu przez ε_0. Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić dla dowolnej liczby ładunków wewnątrz dowolnej zamkniętej powierzchni. Otrzymujemy więc ogólny związek znany jako *prawo Gaussa*

$$\oint \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 4\pi k Q_{wewn.} = \frac{Q_{wewn.}}{\varepsilon_0}$$

02

Prawo Gaussa dla magnetyzmu

- Wskazuje, że nie istnieją "magnetyczne ładunki" – pole magnetyczne nie ma źródeł ani ujść

Prawo Gaussa dla magnetyzmu mówi, że całkowity strumień pola magnetycznego przez dowolną zamkniętą powierzchnię wynosi zero. Oznacza to:

$$\oint B \cdot dS = 0$$

Brak monopoli magnetycznych

W przeciwieństwie do ładunków elektrycznych, nie istnieją pojedyncze "ładunki magnetyczne", które mogłyby być źródłem lub ujściem pola magnetycznego. Wszystkie linie pola magnetycznego tworzą zamknięte pętle.

W praktyce, prawo to podkreśla, że pole magnetyczne zawsze jest ciągłe i zamknięte, co jest podstawową cechą magnetyzmu w teorii elektromagnetyzmu.

To, że linie pola *B* są zawsze liniami zamkniętymi stanowi fundamentalną różnicę między stałym polem magnetycznym i elektrycznym, którego linie zaczynają się i kończą na ładunkach.

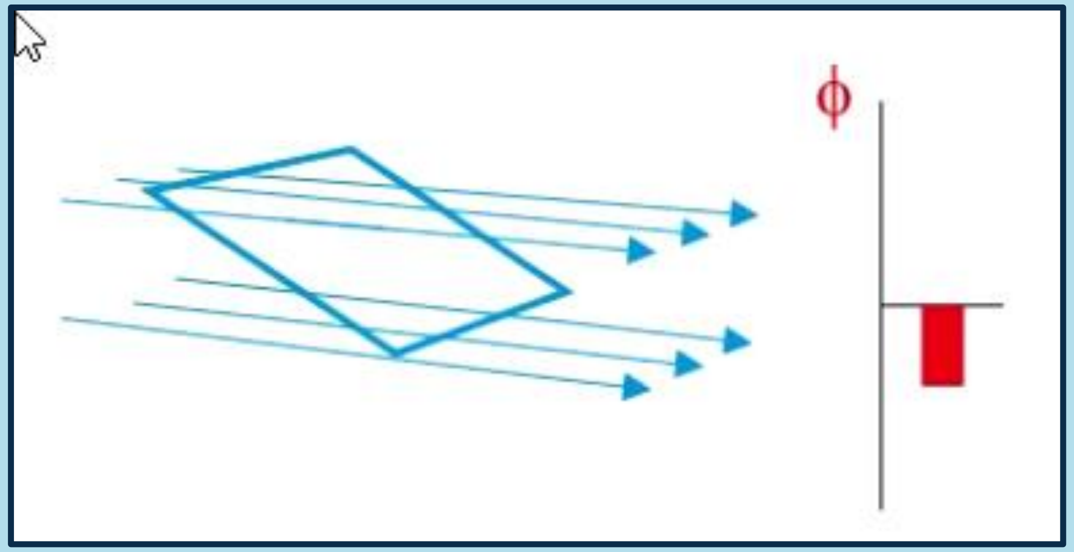
03

Prawo indukcji Faradaya

- zmieniające się w czasie pole magnetyczne indukuje wirujące pole elektryczne

Zjawisko indukcji elektromagnetycznej polega na powstawaniu siły elektromotorycznej SEM w obwodzie podczas przemieszczania się względem siebie źródła pola magnetycznego i tego obwodu. Mówimy, że w obwodzie jest indukowana *siła elektromotoryczna indukcji* (SEM indukcji).

Na podstawie powyższych obserwacji Faraday doszedł do wniosku, że o powstawaniu siły elektromotorycznej indukcji decyduje *szybkość zmian strumienia magnetycznego* ϕ_B. Ilościowy związek przedstawia prawo Faradaya



Analogicznie jak strumień pola elektrycznego ***E***, strumień pola magnetycznego ***B*** przez powierzchnię *S* jest dany ogólnym wzorem

$$\phi_B = \int_S \mathbf{B}\,\mathrm{d}\mathbf{S}$$

który dla płaskiego obwodu w jednorodnym polu magnetycznym wyrażenie upraszcza się do postaci

$$\phi_B = BS\cos\alpha$$

Jeżeli ramka obraca się z prędkością kątową $\omega = \alpha/t$ to strumień $\phi_B = BS\cos\omega t$

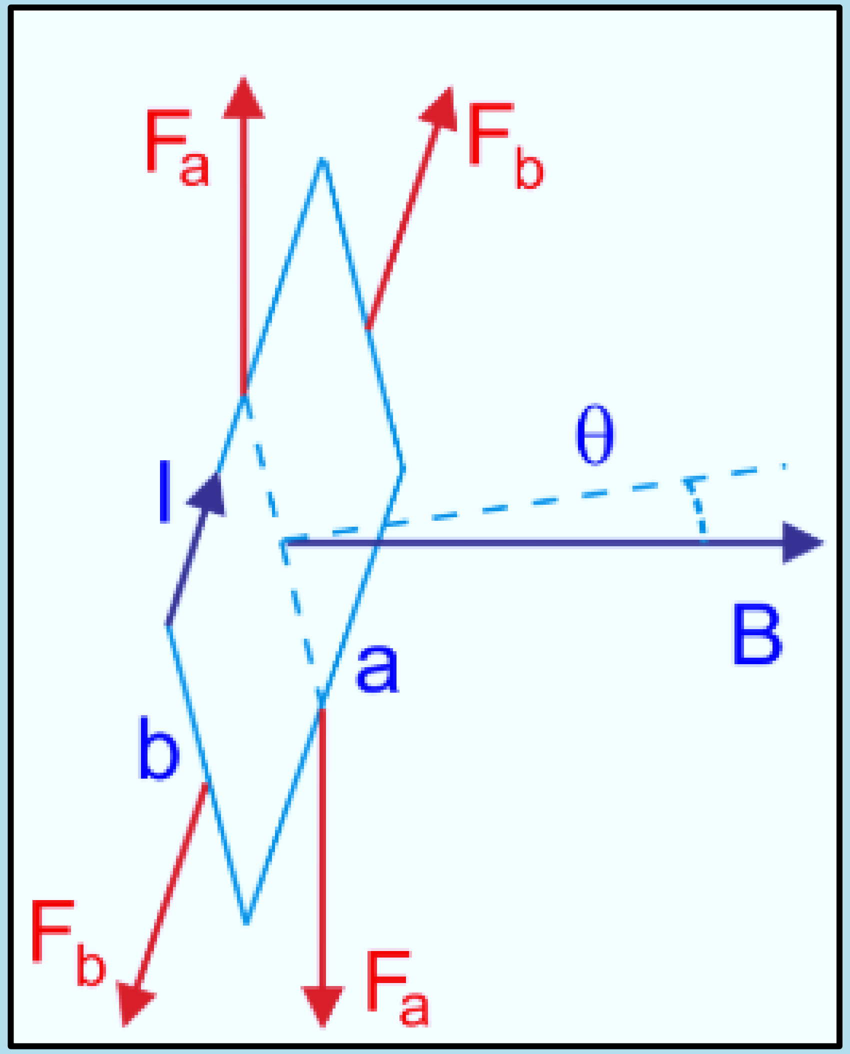
03

Prawo indukcji Faradaya

- zmieniające się w czasie pole magnetyczne indukuje wirujące pole elektryczne

Działanie pola magnetycznego na zamknięty obwód z prądem

- Przez ramkę płynie prąd o natężeniu I, a normalna do płaszczyzny ramki tworzy kąt θ z polem B
- Siły $\boldsymbol{F_b}$ działające na boki b znoszą się wzajemnie. Siły $\boldsymbol{F_a}$ działające na boki a też się znoszą ale tworzą parę sił dającą wypadkowy moment siły obracający ramkę

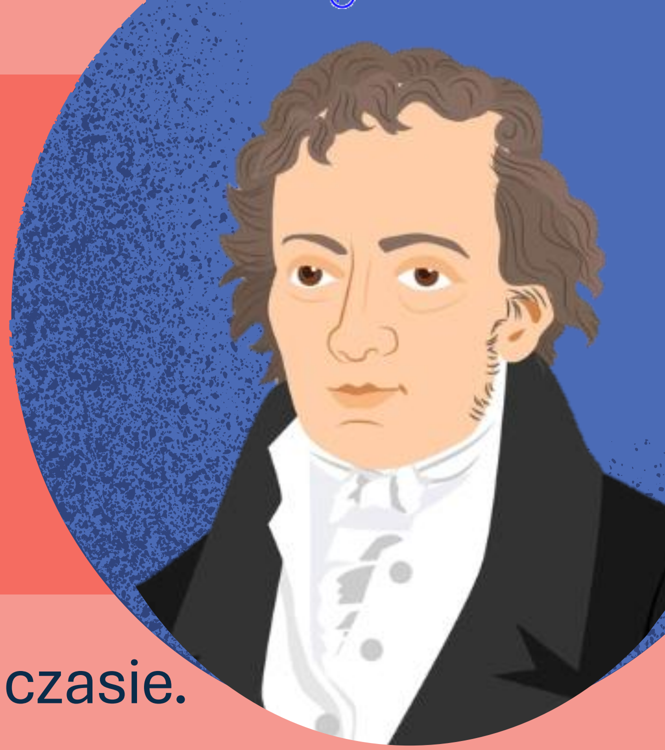


- Mamy dwie siły o równych wartościach, działające w przeciwnych kierunkach, ale przyłożone do różnych punktów obiektu.
- Chociaż te siły się równoważą (ich suma wektorowa daje zerową siłę w układzie wypadkowym), ich rozstawienie powoduje, że wywierają na obiekt efekt obrotowy, czyli generują moment siły.
- Efekt tego momentu siły jest taki, że powoduje on obrót ramki wokół pewnej osi.

04

Prawo Amper’a

- Maxwell dodał tzw. **prąd przesunięcia J**



Maxwell zauważył, że klasyczne prawo Ampère'a nie uwzględnia sytuacji, w których pole elektryczne zmienia się w czasie.

Klasyczne prawo Ampère'a mówiło, że wir pola magnetycznego (∇×B) jest proporcjonalny do gęstości prądu J, czyli:

$$\cancel{\nabla \times B = \mu_0 J}$$

Maxwell dodał do równania dodatkowy składnik, $\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$, który uwzględnia zmiany pola elektrycznego w czasie. Ten składnik nazywamy **prądem przesunięcia**. Dzięki temu, nawet jeśli nie płynie fizyczny prąd, zmieniające się pole elektryczne działa "jakby" było prądem.

Po dodaniu prądu przesunięcia równanie nabiera postaci:

$$\nabla \times B = \mu_0 J + , \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

Równanie to mówi, że wir pola magnetycznego jest generowany zarówno przez rzeczywisty przepływ prądu (J), jak i przez zmieniające się w czasie pole elektryczne. Dzięki temu modyfikacja Maxwella sprawia, że teoria jest spójna również w przypadkach dynamicznych, a ponadto umożliwia przewidzenie istnienia fal elektromagnetycznych (m.in. światła).

PODSUMOWANIE

Maxwell nie tylko zebrał znane wcześniej prawa (Coulomba, Gaussa, Ampère’a, Faradaya), ale też wprowadził istotną modyfikację – prąd przesunięcia. Dzięki temu udało mu się stworzyć spójną teorię elektromagnetyzmu, która nie tylko opisywała wzajemne oddziaływanie pól elektrycznych i magnetycznych, ale także przewidywała istnienie fal elektromagnetycznych (w tym światła).

To odkrycie miało ogromne znaczenie dla rozwoju nauki i technologii, pokazując, że elektryczność, magnetyzm i optyka są ze sobą ściśle powiązane.

Równania Maxwella

Fundamentalne równania techniki mikrofalowej opisujące pole EM w czasie i przestrzeni

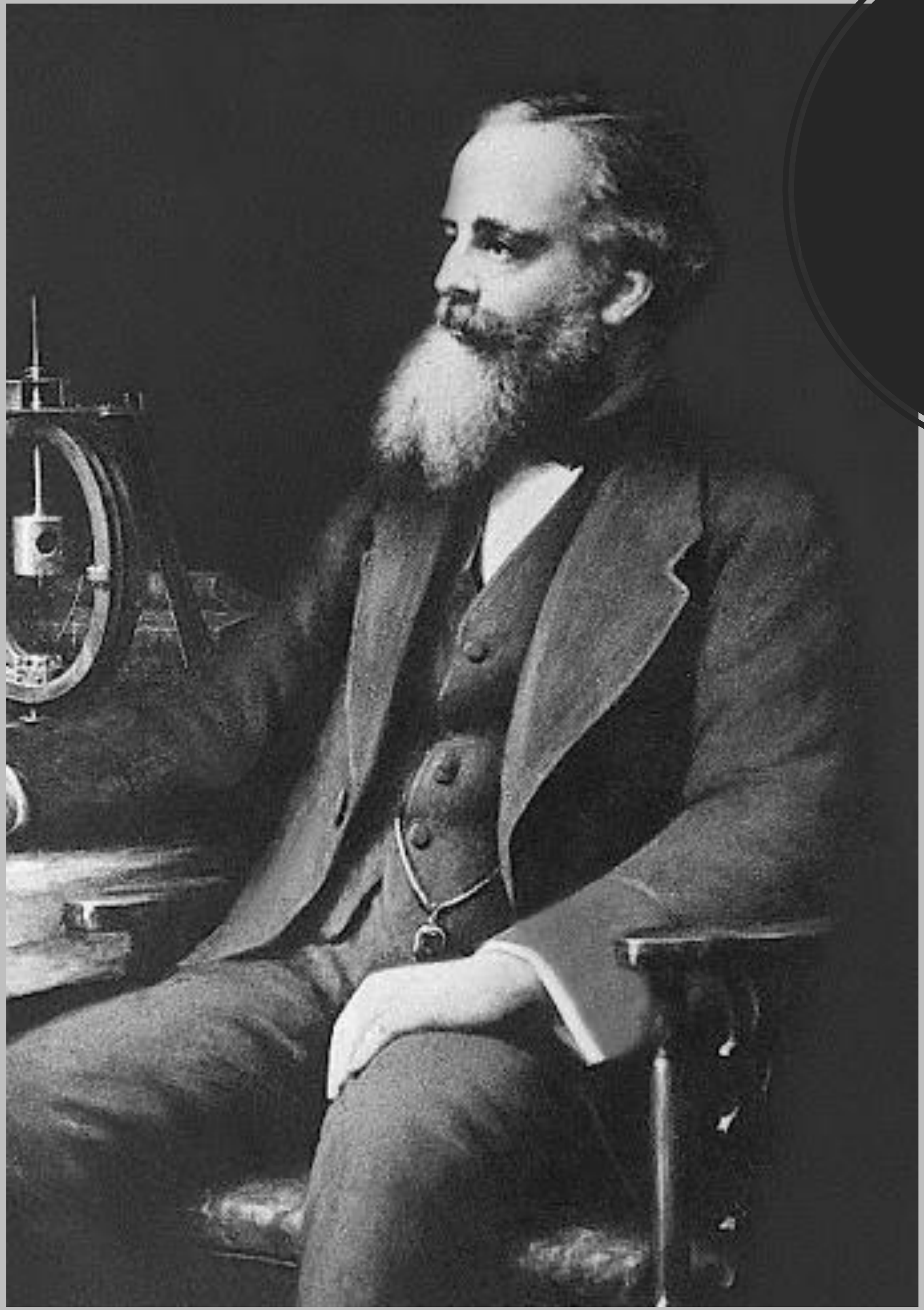
Pole elektromagnetyczne jest kompozycją pól elektrycznego i magnetycznego.
Charakteryzują go następujące wielkości:

- **Natężenie pola elektrycznego** ***E (x, y, z, t)*** jest wektorem (ma swoją wartość i kierunek), jest funkcją miejsca i czasu. Natężenie pola elektrycznego mierzymy w woltach na metr [V/m].

- **Natężenie pola magnetycznego** ***H (x, y, z, t)*** jest także wektorem, mierzymy jego wartość w amperach na metr [A/m].

- **Indukcja elektryczna D** = ε **E** jest wektorem, w ośrodku izotropowym skierowanym w tą samą stronę, co natężenie pola elektrycznego, w próżni **D** = ε_0**E**, mierzymy jej wartość w amperach razy sekunda na metr kwadratowy [As/m^2], czyli kulombach na m^2 [C/m^2] .

- **Indukcja magnetyczna B** = μ**H** jest wektorem, w ośrodku izotropowym skierowanym w tą samą stronę, co natężenie pola magnetycznego, w próżni **B** = μ_0**H**, mierzymy jej wartość w voltach razy sekunda na metr kwadratowy [Vs/m^2].



Równania Maxwella

W II połowie XIX wieku teorię rozchodzenia się fal opracował James Clerk Maxwell. Podobno miał on powiedzieć, że jest to niezwykle piękna teoria, która się nigdy do niczego nie przyda.

Równania Maxwella w postaci całkowej

1. Uogólnione prawo Ampera dla całkowitego prądu

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_S \mathbf{j}_{\mathrm{swob}} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \mathrm{d}\mathbf{s},$$

2. Uogólnione prawo Faradaya

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s},$$

3. Prawo Gaussa dla pola elektrycznego

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \int_V \rho_{swob} \, dv,$$

4. Prawo Gaussa dla pola magnetycznego

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = 0$$

Równania Maxwella

Fundamentalne równania techniki mikrofalowej opisujące pole EM w czasie i przestrzeni

Układ równań Maxwella w formie różniczkowej

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{j}_{\mathrm{swob}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{D} = \rho_{\mathrm{swob}}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0.$$

Równanie Maxwella w postaci całkowej opisują poparte eksperymentami zachowanie rozmaitych wielkości opisujących pole elektromagnetyczne. Ich interpretacja fizyczna jest czytelna. Z wielu względów wygodnie jest zapisać te równania w postaci różniczkowej.

Powyższe równania nazywa się **równaniami stanu lub materiałowymi.**

Charakteryzują one ośrodek.

Równania Maxwella

Fundamentalne równania techniki mikrofalowej opisujące pole EM w czasie i przestrzeni

Układ równań Maxwella w formie różniczkowej

Układ równań Maxwella uzupełniony jest równaniami, wiążącymi wektory **D** i **E**, **B** i **H** oraz $\mathbf{j}_{przew}$ i **E**.

W przypadku izotropowych liniowych ośrodków równania te mają postać:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{E},$$

$$\mathbf{B} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H},$$

$$\mathbf{j}_{przew} = \sigma \mathbf{E}.$$

ośrodek	ε_r
próżnia	1
powietrze	1,0006
lód	100
papier	3,5
alkohol metylowy	30

Przenikalność elektryczna ośrodka ε, w próżni równa $\varepsilon \equiv \varepsilon_0 = 10^{-9}/36\pi$ [F/m]

Przenikalność magnetyczna ośrodka μ, w próżni równa $\mu \equiv \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ [H/m]

operator	**symbol**	**działanie**	**działa na:**	**daje w rezultacie:**
gradient	∇	$\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$	pole skalarne	pole wektorowe
dywergencja	$\nabla \cdot$	$\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$	pole wektorowe	pole skalarne
rotacja	$\nabla \times$	$\left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)$	pole wektorowe	pole wektorowe
laplasjan	Δ	$\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$	pole skalarne	pole skalarne

MATERIAŁ UZUPEŁNIAJĄCY

RÓWNANIA MAXWELLA

KONIEC